EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**048**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $E(-1,1)$ la dreapta $x - y + 1 = 0$ **.**

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $E(-1,1)$ care este tangent la dreapta $x - y + 1 = 0$.

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1, 2)$, $M(2, 4)$ și $N(3, 8)$.

(2p) **e)** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(B\hat{A}C) = 60^\circ$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b,c \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1,2,3)$, $B(3,1,2)$ și $C(2,3,1)$ să aparțină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze a_7, dacă $\frac{1}{7} = 0,a_1a_2...a_n...$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z_3}$ să verifice relația $\hat{x}^{2007} = \hat{1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze suma $C_5^0 + C_5^1 + ... + C_5^5$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = 12$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma termenilor raționali ai dezvoltării binomului $\left(2+\sqrt{3}\right)^3$.

2. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1) + f(2) + ... + f(n)\right)$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $S_0 = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ şi $\Delta = \det\left(A \cdot A^T\right)$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A. Se ştie că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{C})$.

(4p) **a)** Să se verifice că $S_1 = 0$ şi $S_2 = -2a$.

(4p) **b)** Să se arate că $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se calculeze S_3 şi S_4 numai în funcție de a şi b.

(2p) **d)** Să se verifice că $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Să se calculeze Δ în funcție de a şi b.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, atunci $\Delta \geq 0$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $\Delta \geq 0$, atunci $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră integralele $I_n = \int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \ldots \cos nx dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Se admite cunoscută formula $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se calculeze integrala I_2.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $n \in \{5, 6\}$, atunci $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n \neq 0$, pentru orice alegere a semnelor.

(2p) **d)** Să se arate că există o alegere a semnelor astfel încât $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n = 0$, dacă şi numai dacă $n \in \mathbf{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.

(2p) **e)** Să se arate că $I_n \neq 0$ dacă şi numai dacă n este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{I_n}{n}$.

(2p) **g)** Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, notăm cu $A_n = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid I_k \neq 0\}$ şi cu a_n numărul de elemente ale lui A_n. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$.